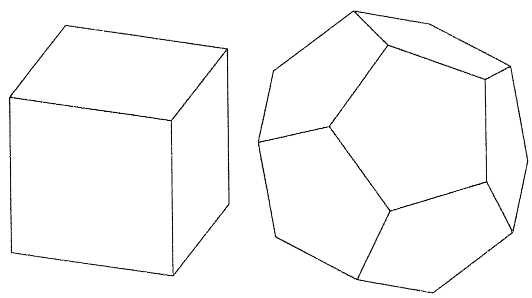
P L A T O   E S C H E R   N U I S

Inleiding

De bovenstaande titel, naar een bekend voorbeeld, geeft de sfeer aan van deze bijdrage tot het liber amicorum van Jan Nuis. Lang geleden was Jan nauw betrokken bij de contacten welke M.C.Escher met het MC, toen nog in de tweede Boerhaavestraat, had. Jan woonde in Purmerend, in de buurt van een blikfabriek waarvoor Escher ooit een koekdoos ontworpen had. Jan's goede contactuele eigenschappen brachten hem op het spoor van nog een paar overgebleven exemplaren ergens achterin de magazijnen, en zo wist hij een paar MC-ers, waaronder ondergetekende, een groot plezier te doen met wat toen alleen maar een leuke doos was maar wat nu een gezocht verzamelobject is geworden. Terwijl ik dit stuk schrijf, op de computer uiteraard, zie ik het staan temidden van andere kristalachtige objecten, de vijf Platonische lichamen of regelmatige veelvlakken van de stereometrie. Een paar zijn hieronder afgebeeld. De doos van Escher is overigens een regelmatig twaalfvlak, op Escheriaanse wijze versierd met schelpen en zeesterren.



Escher werkte nog zonder computer, moeizaam tekende hij zijn kunstige patronen, vaak gesteund door wiskundige overwegingen. Met een computer zou hij misschien tot veel meer in staat geweest zijn, of ook niet. Een moderne computerfanaat is echter in staat om op zijn beeldscherm een grote variëteit van Escherachtige patronen te voorschijn te roepen. Nodig is slechts enige wiskundige achtergrond, programmmeerervaring en natuurlijk wat fantasie. Technische arbeid, voor Escher nog een tijdrovende zaak, wordt door de computerslaaf verricht en een laserprinter maakt de mooiste afdrukken in elke gewenste hoeveelheid. Jan Nuis heeft deze hele ontwikkeling meegemaakt, van eenvoudig wiskundig en grafisch handwerk tot een door computers gestuurde organisatie waarin wiskunde en informatica hand in hand gaan.

In deze bijdrage behandelen we een onderwerp dat laat zien hoezeer wiskunde en computergraphics elkaar nodig hebben om tot resultaten te komen. Het gaat om het afbeelden van een ruimtelijk object op het vlakke computerscherm, precies het probleem waarmede Escher zich voortdurend mee bezighield. Het is hier niet de plaats voor een gedetailleerde en algemene verhandeling over de problematiek van "hidden line removal". Liever richten we de aandacht op een heel concreet probleem, namelijk hoe kunnen we op het beeldscherm van een computer een realistische afbeelding, een projectie, krijgen van een ruimtelijk voorwerp waarbij alleen datgene getoond wordt wat van een bepaalde gezichtshoek uit zichtbaar is. We beperken ons daarbij tot een object dat gevormd wordt als een combinatie van een kubus en een oktaeder, twee polaire Platonische lichamen. Gaan we uit van een kubus dan vormen de centra van de zes zijvlakken de hoekpunten van een regelmatig achtvlak. Wordt dat achtvlak vanuit het gemeenschappelijke centrum vergroot, bijvoorbeeld met de factor 2, dan ontstaat een fraai sterachtig lichaam dat afgebeeld is aan het einde van deze bijdrage. Tevens wordt daar een verwant sterachtig lichaam getoond, een polaire combinatie van twee tetraëders.

Ik weet niet wat Jan later nog zal doen, maar bezig zal hij wel blijven. Ik ken verscheidene gepensionneerden die zich tot actieve, om niet te zeggen fanatieke, computeraars hebben ontwikkeld en die de steunpilaren zijn geworden van hobbyclubs. Hoe het ook zij, ik heb me in deze bijdrage tot taak gesteld iets uit de wereld van CAD/CAM met de professionele methoden van computer graphics, in de huiskamer te brengen, misschien wel de huiskamen van Jan.

Hidden line removal

Een van de centrale problemen bij het weergeven van ruimtelijke objecten als in CAD/CAM is het onderdrukken van onzichtbare lijnen. Er is reeds veel over gepubliceerd en verschillende methoden zijn daartoe voorgesteld en geïmplementeerd. Maar bij elke methode moet steeds fors gerekend worden, zoveel dat ingewikkelde objecten voor een "gewone" computer nauwelijks hanteerbaar zijn. Toch is thuis met een snelle moderne computer, uitgerust met bijvoorbeeld een 80386 processor en een bijbehorende coprocessor, in klein bestek nog veel mogelijk.

Een enkel convex veelvlak, een dodekaëder of de koekdoos van Escher, geeft de minste problemen. We stellen ons voor dat het veelvlak ten opzichte van een ruimtelijk coördinatenstelsel in coördinaten is vastgelegd, en dat de z-as loodrecht op het beeldscherm staat met de positieve as naar ons toe. Deze is tevens de kijkrichting. Aan elk zijvlak voegen we een normaalvector toe welke naar buiten gericht is. Een zijvlak dat van ons afgekeerd is, en bij projectie dus onzichtbaar is, wordt gemarkeerd door een negatieve z-component van de bijbehorende normaalvector. Dat geeft een eenvoudige toets om bij een willekeurige stand van het veelvlak de eventuele onzichtbaarheid van een zijvlak vast te stellen.

Zodra er minstens twee convexe veelvlakken aanwezig zijn hebben we te maken met een gedeeltelijke bedekking van het ene veelvlak door het andere en met een eventuele doordringing van onderlinge zijvlakken waardoor er nieuwe hoekpunten en ribben kunnen ontstaan. Om dat probleem op te lossen maken we gebruik van het beperkt oplossend vermogen van het beeldscherm. In de VGA norm zijn er 640*480 pixels aanwezig. Op zijn ergst kan elk van deze pixels een beeldpunt zijn van de te vormen projectie, maar in de practijk is de figuur beperkt tot een deelrechthoek van het totale beeldscherm. Hoewel een groot deel van ons betoog een algemenere strekking heeft beperken we ons tot het hier afgebeelde object dat gevormd is uit een kubus en een oktaëder.

Ten opzichte van een standaard coördinatenstelsel denken we de hoekpunten van de kubus vastgelegd als $(\pm1,\pm1,\pm1)$ en die van het achtvlak als $(\pm a,0,0)$, $(0,\pm a,0)$ en $(0,0,\pm a)$ waarbij a een nader te bepalen getal is. De figuur is daardoor voldoende vastgelegd. De gezichtshoek verwerken we door het object te onderwerpen aan een tweetal ruimtelijke draaiingen, zodanig dat de kijkrichting als z-as loodrecht op het beeldscherm staat.

Een willekeurige pixel correspondeert dan met een rechte lijn die mogelijk een of meer van de zes plus acht zijvlakken passeert. Laten we aannemen dat er aldus een aantal snijpunten S_1, S_2, S_3,... zijn. Bij elk snijpunt behoort een rangnummer van een der 14 zijvlakken en een z-coördinaat. Het snijpunt waarvoor die z-waarde maximaal is vertelt ons welk zijvlak op die positie het meest naar voren ligt en dus zichtbaar is. Het rangnummer van dat zijvlak voegen we als attribuut aan de gebruikte pixel toe. Voeren we deze procedure uit voor alle pixels van een rechthoek welke de te vormen projectie bevat dan behoort bij elke pixel van die rechthoek een attribuut dat van 0 to 14 kan lopen. Vertalen we het attribuut als een kleurenwaarde dan ontstaat vanzelf een plaatje van de kristalvorm waarin elk zijvlak zijn eigen kleur kan krijgen.

Wiskundige uitwerking

Bij de wiskundige uitwerking van dit schema zijn er een aantal deelproblemen welke we nu de revue laten passeren.
Om het af te beelden lichaam in de gewenste stand te brengen moeten afhankelijk van de gezichtshoek twee ruimtelijke draaiingen uitgevoerd worden resp. om de x-as en de y-as. In principe zijn dat eenvoudige coördinatentransformaties van het type

$$y' = y\cos(\alpha) - z\sin(\alpha),$$
$$z' = y\sin(\alpha) + z\cos(\alpha).$$

We herhalen nog even dat bij de projectie van het lichaam op het beeldscherm de x-as en de y-as zich in of evenwijdig aan het beeldvlak bevinden en dat de positieve z-as er loodrecht op naar de toeschouwer gericht is.
Het volgende probleem is om te onderzoeken of een verticale lijn $x=x_0$, $y=y_0$ een snijpunt bezit in het convexe vlakstuk dat begrensd wordt door een polygoon met drie of meer hoekpunten. Het is daartoe voldoende om alleen op de projectie van die veelhoek op het beeldscherm te letten. Gaat het bijvoorbeeld om een vierhoek met de projectie $P_1P_2P_3P_4$ dan moet het punt P_0 met de coördinaten x_0,y_0 zich in het inwendige bevinden. De voorwaarde daartoe is dat de vier determinanten gevormd uit de x,y-coördinaten van P_0 en van telkens twee hoekpunten:
$\det(P_0P_1P_2)$, $\det(P_0P_2P_3)$, $\det(P_0P_3P_4)$, $\det(P_0P_4P_1)$ hetzelfde teken bezitten.
In het hier beschouwde probleem moet in principe de toets voor elke pixellijn op alle 14 zijvlakken uitgevoerd worden. Maar zijvlakken die zelf al onzichtbaar zijn, dus waarvan de normaalvector een negatieve z-component heeft, kunnen daarbij overgeslagen worden, en dat scheelt al meteen de helft.
Zodra een pixellijn een van de zijvlakken inwendig treft moet er verder gerekend worden, en moet van het ruimtelijke snijpunt ook de z-coördinaat berekend worden. Dat gaat met behulp van

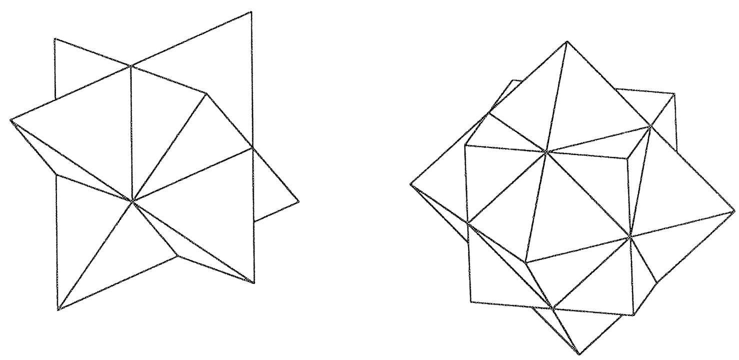
$$z \det(P_1P_2P_3) = z_1 \det(P_0P_2P_3) + z_2 \det(P_0P_3P_1) + z_3 \det(P_0P_1P_2)$$

Zijn er een zeker aantal snijpunten dan kennen we aan de pixel het rangnummer van het zijvlak met de grootste z-waarde, dus met het meest naar ons toe gelegen snijpunt, als attribuut toe. Bij de administratie van de nodige data welke zich aan het begin van het computerprogramma bevindt kunnen de 14 zijvlakken naar believen van rangnummers voorzien worden en kunnen we aan die rangnummers kleuren toekennen. Uiteindelijk bepalen we voor elke pixel binnen een gegeven rechthoek aldus een kleur, zwart of de achtergrond wanneer er geen snijpunt is of de kleur welke bij het meest naar voren gelegen vlakstuk behoort.

Zoals wel te verwachten is neemt het rekenwerk zoveel tijd in beslag dat afhankelijk van de grootte van de projectie met een flink aantal minuten tot iets in de orde van een uur rekening gehouden moet worden. Wanneer we van het object alleen de ribben wensen te tekenen gaat het veel sneller. In beginsel kunnen we de toetsen pixels beperken tot die welke op de projectie van ribben en snijlijnen van kubus en achtvlak liggen. De 12 ribben van de kubus en de 12 ribben van het achtvlak geven de minste problemen. Het is ook niet moeilijk daarvan alvast die ribben uit te zonderen welke zelf onzichtbaar zijn. Wel een wiskundig probleempje vormen de snijlijnen van telkens een zichtbaar kubusvlak en een zichtbaar achtvlak. Daarbij moet telkens de positie van de snijlijn berekend worden en moet nagegaan worden of een deel van de snijlijn zich binnen het gebruikte beeldvenster bevindt.

Omdat het rekenwerk nu veel geringer is kost het programma ook veel minder tijd, iets van een paar minuten. Een kleine variant van het programma is gebruikt om het plaatje met behulp van een laserprinter af te drukken, iets wat zich binnen een minuut afspeelt.

Aldus wordt Jan Nuis de mogelijkheid geboden met Platonische lichamen op Escheriaanse wijze te stoeien. Veel tijd behoeft het niet te kosten, veel minder dan Escher nodig had!



Hans Lauwerier